Chapitre 2

Réponses

2.1 Calcul numérique

Ex 1

$\ell = \dfrac{12\times 5+20\times 6}{2} \times 4{,}5 = 405$ cm.

Ex 2

$A = \dfrac{59}{32}$ $B = -\dfrac{31}{10}$ $C = \dfrac{494}{3}$ $D = -\dfrac{31}{85}$

$E = -\dfrac{11}{21}$ $F = \dfrac{16}{39}$

Ex 3

$A = \dfrac{55}{24}$ | $B = \dfrac{7}{11}$ | $C = \dfrac{7}{18}$ $D = 2$

Ex 4

$$\begin{aligned} p &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{2020}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\cdots\times\frac{2019}{2020}\\ &= \frac{1}{2020}\end{aligned}$$

Ex 5

$A = 0{,}049$ $B = 3600$ $C = 0{,}072$

Ex 6

1) $3-\pi<0$ donc $A = -(3-\pi) = \pi-3$

2) $B^2 = C^2$ et $B>0$, $C>0$ donc $B = C$

3) non. $D^2 = E^2$ mais $D>0$ et $E<0$

4) $F<0$ et $F^2 = 4$ donc $F = -2$

Ex 7

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{10^2\times 5} - 3\sqrt{5^2\times 3}\\ &= 2\times\sqrt{100}\times\sqrt{5} - 3\times\sqrt{25}\times\sqrt{3}\\ &= 2\times 10\times\sqrt{5} - 3\times 5\times\sqrt{3}\\ &= -15\sqrt{3}+20\sqrt{5}\end{aligned}$$

$B = 7\sqrt{3}$ $C = 2\sqrt{2}$ $D = 11\sqrt{3}$

$E = 9\sqrt{5}$ $F = 11\sqrt{3}$ $G = 9\sqrt{5}$

$H = \sqrt{6}$ $I = 44\sqrt{3}$ $J = -28\sqrt{5}$

Ex 8

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{\sqrt{6}-1} = \frac{5(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \frac{5(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{6}^2-1}\\ &= \frac{5(\sqrt{6}+1)}{5} = 1+\sqrt{6}\end{aligned}$$

$F = \dfrac{7+\sqrt{21}}{4}$

$I = -2+\sqrt{3}$ $J = -\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$

$K = \dfrac{6-3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ $L = -5-2\sqrt{6}$

$M = -\dfrac{5+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{3}$ $N = \dfrac{1}{2}$

Ex 9

1) $B(0) = \dfrac{(8^1+1)^2}{(1-4^{-1})^3} = \dfrac{81}{\frac{27}{64}} = 192$

$B(1) = \dfrac{(8^2+8)^2}{(4-1)^3} = \dfrac{(72)^2}{27} = 192$

2) $$\begin{aligned}B(n) &= \frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}\\ &= \frac{81\times 8^{2n}}{27\times 4^{3n-3}}\\ &= \frac{3\times 2^{6n}}{2^{6n-6}}\\ &= 3\times 2^6 = 192\end{aligned}$$

Ex 10

L'aire reste toujours la même.

Ex 11

1) Le produit est égal à

$$\frac{4\times 4^5}{3\times 3^5}\times\frac{6\times 6^5}{2\times 2^5} = 4\times 4^5 = 2^{12}$$

Donc $n=12$.

2) $3^{2001}+3^{2002}+3^{2003} = 3^{2001}(1+3+3^2) = (13)3^{2001}$

Donc $n=13$.

3) $$\begin{aligned}A &= (10^{2002}+25)^2-(10^{2002}-25)^2\\ &= 10^{4004}+2\times 25\times 10^{2002}+25^2\\ &\quad -(10^{4004}-2\times 25\times 10^{2002}+25^2)\\ &= 4\times 25\times 10^{2002}\\ &= 100\times 10^{2002} = 10^{2004},\end{aligned}$$

Donc $n=2004$.

Ex 12

Multiplier par $1=2-1$,

$$\begin{aligned}A &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\ &= (2^{16}-1)(2^{16}+1)\\ &= 2^{32}-1\end{aligned}$$

2.2 Calcul algébrique

Ex 13

$$\begin{aligned}A &= (-7x+6)(-6x-8)\\ &= 42x^2+56x-36x-48\\ &= 42x^2+20x-48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= (-x-10)(-9x+2)\\ &= 9x^2-2x+90x-20\\ &= 9x^2+88x-20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= (6x+2)^2+(9x-3)(9x+3)\\ &= (6x)^2+2\times 6x\times 2+2^2+((9x)^2-3^2)\\ &= 36x^2+24x+4+81x^2-9\\ &= 117x^2+24x-5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= (3x-6)^2-(-4x-10)(3x+8)\\ &= (3x)^2-2\times 3x\times 6+6^2-(-12x^2-32x-30x-80)\\ &= 9x^2-36x+36-(-12x^2-62x-80)\\ &= 9x^2-36x+36+12x^2+62x+80\\ &= 21x^2+26x+116\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= -(8x+4)(3x-10)-(6x-5)(6x+5)\\ &= -(24x^2+(-80x)+12x+(-40))-((6x)^2-5^2)\\ &= -(24x^2-68x-40)-(36x^2-25)\\ &= -24x^2+68x+40-36x^2+25\\ &= -60x^2+68x+65\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= (6x-7)^2+(5x+10)^2\\ &= (6x)^2-2\times 6x\times 7+7^2+((5x)^2+2\times 5x\times 10+10^2)\\ &= 36x^2-84x+49+25x^2+100x+100\\ &= 61x^2+16x+149\end{aligned}$$

Ex 14

$$\begin{aligned}A &= 81x^2-4\\ &= (9x)^2-2^2\\ &= (9x-2)(9x+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= (-x-2)(-3x-4)+(8x+4)(-3x-4)\\ &= (-3x-4)(-x-2+8x+4)\\ &= (-3x-4)(7x+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 16-(-8x-6)^2\\ &= 4^2-(-8x-6)^2\\ &= (4-8x-6)\big(4-(-8x-6)\big)\\ &= (4-8x-6)(4+8x+6)\\ &= (-8x-2)(8x+10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= (-9x+2)(7x-2)-(-9x+2)\\ &= (-9x+2)(7x-2)-(-9x+2)\times 1\\ &= (-9x+2)\big(7x-2-1\big)\\ &= (-9x+2)(7x-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= 49x^2-36+(7x+6)(5x+8)\\ &= (7x)^2-6^2+(7x+6)(5x+8)\\ &= (7x+6)(7x-6)+(7x+6)(5x+8)\\ &= (7x+6)(7x-6+5x+8)\\ &= (7x+6)(12x+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= (-5x+4)^2-(-8x+4)(-5x+4)\\ &= (-5x+4)\big(-5x+4-(-8x+4)\big)\\ &= (-5x+4)(-5x+4+8x-4)\\ &= (-5x+4)\times 3x\end{aligned}$$

Ex 15

En élevant au carré :

$36=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

D'où $x^2+\dfrac{1}{x^2} = 36-2 = 34$.

Ex 16

$$\begin{aligned}A &= 4x^4-4x^2y+y^2\\ B &= 9x^4-4y^6\\ C &= 16a^2b^2c^2-40a^2bc^2+25a^2c^2\\ D &= 144a^8-121a^2b^2\\ E &= 81a^4-16\\ F &= 16a^4-72a^2+81\end{aligned}$$

Ex 17

$$\begin{aligned}A &= 9x^2+4y^2-12xy+4y-6x+1\\ B &= 9x^2-y^2-z^2-2yz\\ C &= 4a^{2n}-4a^{2n+1}+a^{2n+2}\\ D &= 16a^{6n}-9a^{4n}\\ E &= x^4+4x^3+4x^2-1\\ F &= x^6+1\end{aligned}$$

Ex 18

$$\begin{aligned}A &= 9-6y+y^2\\ B &= 25-20x^2+4x^4\\ C &= 4a^2b^4-12ab^2c^3d^4+9c^6d^8\\ D &= x^2+4y^2\\ E &= x^2y^2-8xy^2+16y^2\\ F &= a^2x^2+2abxy+b^2y^2\\ G &= a^2+4ab+6ac+4b^2+12bc+9c^2\\ H &= a^2+4ab-2ac+4b^2-4bc+c^2\end{aligned}$$

Ex 19

$$\begin{aligned}A &= 3a(4b^2+3b-2a)\\ B &= a^2bc(a^3b^2c+ab-1)\\ C &= (b-a)(x-2)(x+2)(x^2+4)\\ D &= (a-5)(a+5)(y-x)(y+x)\\ E &= (b-5a)(y-x)\\ F &= (2a-1)^2(3-x)\\ G &= (2a-1)(8a-1)\\ H &= (x-y)^{n-2}(y^2+2xy+y-3x^2)\end{aligned}$$

Ex 20

1) On a $$\begin{aligned}4x^2+9y^2 &= 4x^2+12xy+9y^2-12xy\\ &= (2x+3y)^2-12xy\\ &= 3^2-12.(-4)\\ &= 9+48\\ &= 57.\end{aligned}$$

2) On a $9=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=x^2-8+y^2$
Donc $x^2+y^2=17$.

3) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=169$
donc $a^2+b^2-ab=169-123=46$
donc $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=13\times 46$

4) On a $16=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2-6+y^2$
Donc $x^2+y^2=22$.

On a $2x^2y^2=2(xy)^2=2(-3)^2=18$.
et
$484=(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4=x^4+18+y^4$
Donc $x^4+y^4=466$.

Ex 21

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=1$$
$$\iff a(1+a)+b(1+b)=(1+a)(1+b)$$
$$\iff a^2+b^2=1+ab$$
$$\iff a^2-ab+b^2=1$$

Donc en multipliant par $(a+b)$: $a^3+b^3=a+b$.

Ex 22

1) $S=\dfrac{1}{2}\times a\times h_a$.

2) $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

3) $b^2=x^2+c^2-(a-x)^2=c^2-a^2+2ax$.

4) a) $x=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}$.

b) $h_a^2=b^2-x^2=b^2-\left(\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}\right)^2$

donc

$$h_a^2=\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\times\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2=\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\times\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
$$h_a^2=\frac{1}{4a^2}\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)$$

c) $\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)=(c-b+a)(c+b-a)$.

d) $\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)=(a+b-c)(a+b+c)$.

5)
$$S^2=\frac{a^2}{4}h_a^2$$
$$=\frac{(c-b+a)(c+b-a)(a+b-c)(a+b+c)}{16}$$
$$=\frac{(c-b+a)}{2}\,\frac{c+b-a)}{2}\,\frac{(a+b-c)}{2}\,\frac{(a+b+c)}{2}$$
$$=(p-b)(p-a)(p-c)p$$

D'où

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2.3 Algorithmique

Ex 23

$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100(a^2+a)+25$
On applique avec
$a=6$, $65^2=100\times(36+6)+25=4225$
$a=7$, $75^2=100\times(49+7)+25=5625$
$a=12$, $125^2=100\times(144+12)+25=14625$
$a=40$, $405^2=100\times(1600+40)+25=164025$

Ex 24

```
def prog1(n):
    n=n+2
    while n%7!=0:
        n=n+2
    return n

def prog2(n):
    n=n+22
    while n%15!=0:
        n=n+22
    return n

def prog3(n):
    n=n+12
    while n%28!=0:
        n=n+12
    return n
```

On obtient

	1	2	3	4	5	10	11	12
algo1	7	14	7	14	7	14	21	14
algo2	45	90	135	180	225	120	165	210

Le programme 3 tourne en boucle pour les nombres impairs, et pour beaucoup de nombres pairs.

Ex 25

```
def prog(n):
    n=n-2
    while n%5!=0:
        n=n+12
    n=n-4
    while n%7!=0:
        n=n+60
    n=n+6
    return n
```

Avec $n=123$ on obtient 447.

Ex 26

```
def prog(n):
    n=n*5
    while n<158:
        n=n*5
    n=n-4
    while n%7!=0:
        n=n-4
    n=n//7
    n=n+43
    if n%2==1:
        n=n+43
    n=n-25
    return n
```

Avec $n=27$ on obtient 111.

Ex 27

Pour obtenir 14, il faut entrer 42, 28 ou 21.
Au départ, on multiplie par 2, puis de même dans chaque boucle. Le résultat sera donc un nombre pair.

Ex 28

Il faut entrer le nombre 3 (c'est le nombre qui minimise les tours dans les 2 boucles).

Ex 29

On a $\sqrt{1000}\approx 31{,}6$. On va donc prendre $-31\leqslant a,b\leqslant 31$.

```
N=0
for a in range(-31,32):
    for b in range(-31,32):
        if a**2+b**2<=1000:
            N=N+1
print(N)
```

On obtient $N=3149$.

Ex 30

Pour la 1re inéquation, on trouve $n=243$.
On propose trois formes d'affichage plus ou moins soignées.

```
n=1
A=1.01
while A**n<=100:
    n+=1
print(n)
print(n,"car A^",n-1,"=",A**(n-1),"<100<A^",n,"=",A**n)
print("{} car A^{}={} <100< A^{}={}".format(n,n-1,A**(n-1),n,A**n))
```

```
463
463 car A^ 462 = 99.19155247508611 <100<A^ 463 = 100.18346799983698
463 car A^462=99.19155247508611 <100< A^463=100.18346799983698
```

Pour la 2e inéquation, on trouve $n=14$.

```
n=1
A=1.25
S=A
while S<=100:
    n+=1
    S+=A**n
print(n)
print("{} car S^{}={} <100< S^{}={}".format(n,n-1,S-A**n,n,S))
```

```
14
14 car S^13=85.94947017729282 <100< S^14=108.68683772161603
```

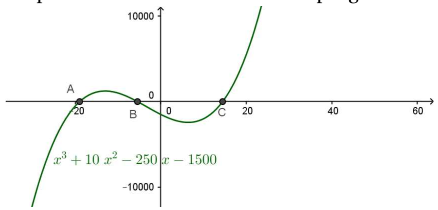
Ex 31

Voir ci-dessous le programme proposé.
La solution cherchée est $x_0\approx -1{,}465571\pm 10^{-6}$ et $x_0\approx -1{,}465571231\pm 10^{-9}$.

```
def f(x):
    return x**3+x**2+1

def solution(A,B,P):
    X=f(A)
    Y=f(B)
    while B-A>10**(-P):
        C=(A+B)/2
        Z=f(C)
        if X*Z<0:
            B=C
            Y=Z
        else:
            A=C
            X=Z
    return C

A=int(input("Entrer la borne inf. :"))
B=int(input("Entrer la borne sup. :"))
P=int(input("Entrer la précision  :"))
print(round(solution(A,B,P),P))
```

```
Entrer la borne inf. :-2
Entrer la borne sup. :-1
Entrer la précision  :6
-1.465571


Entrer la borne inf. :-2
Entrer la borne sup. :-1
Entrer la précision  :9
-1.465571231
```

Pour l'autre équation l'équation il faut modifier l'expression de la fonction dans le programme.



D'après cette courbe, obtenue avec Geogebra, le nombre de solutions à cette équation est 3.
En notant A, B et C les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, on a :
$-20<x_A<-10$, $-10<x_B<0$ et $10<x_C<20$
Ces informations suffisent pour déterminer les solutions cherchées à la précision désirée :

$x_A \approx -19{,}002207 \pm 10^{-6}$ et $x_A \approx -19{,}002207 \pm 10^{-9}$.
$x_B \approx -5{,}458723 \pm 10^{-6}$ et $x_B \approx -5{,}458722395 \pm 10^{-9}$.
$x_C \approx 14{,}460929 \pm 10^{-6}$ et $x_C \approx 14{,}460929394 \pm 10^{-9}$.

```
def f(x):
    return x**3+10*x**2-250*x-1500

A=10
B=20
P=9
print("Solution entre",A,"et",B,"à la précision",P,":",round(solution(A,B,P),P))
```

```
Solution entre -20 et -10 à la précision 6 : -19.002207
Solution entre -20 et -10 à la précision 9 : -19.002207
Solution entre -10 et 0 à la précision 6 : -5.458723
Solution entre -10 et 0 à la précision 9 : -5.458722395
Solution entre 10 et 20 à la précision 6 : 14.460929
Solution entre 10 et 20 à la précision 9 : 14.460929394
```

Ex 32

a) Pour que « lorsque le résultat est négatif on met 0 », il faut ajouter un test au bon endroit qui remette à 0 une note négative (`Si S < 0 alors affecter 0 à S`. Le bon endroit est évidemment après le calcul de la note au QCM pour un candidat, donc juste avant l'instruction `Affecter T+S à T` qui utilise la note S. Si on met ce test après, cela ne sert à rien et on comptabilise les notes négatives dans le total T.
b) Cette instruction conditionnelle examine le résultat R d'un tirage aléatoire entre 0 (0 compris) et 1 (1 non compris). Lorsque $R \leqslant 0{,}25$, c'est-à-dire dans 1 cas sur 4, on va augmenter la note de 2 points (le candidat répondant au hasard est tombé sur la bonne réponse) et sinon on va la diminuer de 1 point (il a donné une mauvaise réponse).
c) Le programme correspondant à cet algorithme corrigé tient compte de la contrainte soulignée. Les résultats d'exécution demandés sont sur l'illustration. Les fluctuations de la note sont moindre lorsqu'il y a davantage de candidats. La moyenne des notes obtenues s'établit finalement aux alentours de 0,71 ou 0,72 (valeurs obtenues pour N = 50000).

```python
from random import random

N=int(input("Nombre de candidats:"))
T=0
for i in range(1,N+1):
    S=0
    for j in range(1,6):
        R=random()
        if R<=0.25 : S+=2
        else : S-=1
    if S<0 : S=0
    T+=S
print(round(T/N,5))
```

d) Si on ajoute un compteur Z des candidats ayant 0 à ce QCM, on doit l'initialiser à 0 et l'incrémenter dans la boucle à chaque fois que S = 0. Le pourcentage demandé est obtenu en divisant ce compteur par N et en multipliant par 100. On trouve alors qu'environ 63% des candidats aléatoires ont un résultat nul (ce qui est l'objectif recherché).

```python
from random import random

N=int(input("Nombre de candidats:"))
T,Z=0,0
for i in range(1,N+1):
    S=0
    for j in range(1,6):
        R=random()
        if R<=0.25 : S+=2
        else : S-=1
    if S<0 :
        S=0
        Z+=1
    T+=S
print("Moyenne =",round(T/N,5))
print("Candidats nuls =",round(Z*100/N,2),"%")
```

Ex 33

Voici une proposition de programme qui réalise ce projet.

```python
from random import *
a,b=1,100
jouer=1
while jouer==1:
    n,c=randint(a,b),1
    m=int(input("Deviner un entier entre {} et {}: ".
        format(a,b)))
    while m!=n:
        c+=1
        t="bravo!"
        if m>n:t="c'est moins! "
        if m<n:t="c'est plus! "
        m=int(input(t))
    print("solution trouvee en {} coups".format(c))
    jouer=int(input("Une autre partie? (taper 0 pour
        finir) "))
print("Au revoir!")
```


Ex 34

Voici trois propositions de programme qui réalisent ce projet.

- La 1re est simpliste, elle donne la correction en cas d'erreur. Par défaut les multiplicandes sont compris entre 2 et 10 et pour arrêter le programme, il faut un taux de réussite supérieur à 90% et plus de 20 bonnes réponses.
- La 2e est plus exigeante, elle attend que l'utilisateur se corrige de lui-même en cas d'erreur.
- La 3e version est le mode « expert », les questions sont posées sous la forme d'une division la moitié du temps et l'utilisateur peut mettre fin au programme en tapant 0.

```python
from random import *

def tables1(m=2,M=10,t=0.9): #version 1
    br,mr,tx=0,0,0
    while tx<=t or br<=20:
        a=randint(m,M)
        b=randint(m,M)
        c=a*b
        n=int(input("{}\u00D7{}=".format(a,b))) #
            mettre \
        if n==c:
            br+=1
            print("Oui!")
        else:
            mr+=1
            print("NON ({}\u00D7{}={})".format(a,b,c))
        tx=br/(br+mr)
    print("{} bonnes reponses sur {}".format(br,br+
        mr))

def tables2(m=2,M=10,t=0.9): #version 2
    br,mr,tx=0,0,0
    while tx<=t or br<=20:
        a=randint(m,M)
        b=randint(m,M)
        c=a*b
        n=int(input("{}\u00D7{}=".format(a,b)))
        if n==c:
            br+=1
            print("Oui!")
        else:
            mr+=1
            print("NON! essaie de nouveau...")
            while n!=c:
                n=int(input("{}\u00D7{}=".format(a,b)))
            print("Bravo! on continue...")
        tx=br/(br+mr)
    print("{} bonnes reponses sur {}".format(br,br+
        mr))

def tables3(m=2,M=10,t=0.9): #version 3
    br,mr,tx=0,0,0
    while tx<=t or br<=20:
        a=randint(m,M)
        b=randint(m,M)
        r=randint(0,1)
        c=a*b
        if r==0 :
            n=int(input("{}\u00D7{}=".format(a,b)))
            if n==c:
                br+=1
                print("Oui!")
            else:
                mr+=1
                print("NON! essaie de nouveau...")
                while n!=c:
                    n=int(input("{}\u00D7{}=".format(a,b))
                        )
                print("Bravo! on continue...")
        else:
            n=int(input("{}\u00F7{}=".format(c,b)))
            if n==0 : break
            if n==a:
                br+=1
                print("Oui!")
            else:
                mr+=1
                print("NON! essaie de nouveau...")
                while n!=a:
                    n=int(input("{}\u00F7{}=".format(c,b))
                        )
                print("Bravo! on continue...")
        tx=br/(br+mr)
    print("{} bonnes reponses sur {}".format(br,br+
        mr))
```

2.4 (In)équations

Ex 35

1)

$$\begin{aligned}
&\frac{-4x-6}{3}-\frac{-4x-2}{6}=\frac{-7x-5}{2}\\
\iff\ &\frac{(-4x-6)\times 2}{3\times 2}-\frac{-4x-2}{6}=\frac{(-7x-5)\times 3}{2\times 3}\\
\iff\ &\frac{-8x-12-(-4x-2)}{\cancel{6}}=\frac{-21x-15}{\cancel{6}}\\
\iff\ &-8x-12+4x+2=-21x-15\\
\iff\ &-4x-10=-21x-15\\
\iff\ &-4x+21x=-15+10\\
\iff\ &17x=-5\\
\iff\ &x=\frac{-5}{17}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } \frac{-5}{17}.}$

2)

$$\begin{aligned}
&\frac{-3x+6}{8}-\frac{x+10}{3}=\frac{-5x+10}{4}\\
\iff\ &\frac{(-3x+6)\times 3}{8\times 3}-\frac{(x+10)\times 8}{3\times 8}=\frac{(-5x+10)\times 6}{4\times 6}\\
\iff\ &\frac{-9x+18-(8x+80)}{\cancel{24}}=\frac{-30x+60}{\cancel{24}}\\
\iff\ &-9x+18-8x-80=-30x+60\\
\iff\ &-17x-62=-30x+60\\
\iff\ &-17x+30x=60+62\\
\iff\ &13x=122\\
\iff\ &x=\frac{122}{13}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } \frac{122}{13}.}$

3) On obtient une égalité de la forme : $0x=\frac{1}{2}$, donc cette équation n'a pas de solution.

4)

$$\begin{aligned}
&(2x+5)^2-2(7x+4)=4(x+3)^2-1\\
\iff\ &4x^2+6x+17=4x^2+24x+35\\
\iff\ &-18x=18\\
\iff\ &x=-1
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\{-1\}$

5) $\mathscr{S}=\{3\}$

6) Domaine de résolution : $\mathscr{D}_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}-\{-2;2\}$
Pour tout $x\in\mathscr{D}_{\mathbb{R}}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff\ &\frac{4x-8}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff\ &\frac{4x-8+x+2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}\\
\iff\ &\frac{5x-6}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}
\end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour tous les x de $\mathscr{D}_{\mathbb{R}}$, donc $\mathscr{S}=\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

Ex 36

1) $\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{3};\frac{3}{5}\right\}$

2) $\mathscr{S}=\{3;4;10\}$

3)

$$\begin{aligned}
&\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\\
\iff\ &\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0\\
\iff\ &\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)^2=0\\
\iff\ &\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)-2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)+2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)=0\\
\iff\ &(-x+1)\left(3x-\frac{1}{3}\right)=0
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{9};1\right\}$

4)

$$\begin{aligned}
&-x(5-x)+3(x-5)^2=x^2-25\\
\iff\ &x(x-5)+3(x-5)^2=x^2-25\\
\iff\ &(x-5)(4x-15)=(x-5)(x+5)\\
\iff\ &(x-5)(4x-15)-(x-5)(x+5)=0\\
\iff\ &\dots
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\left\{5;\frac{20}{3}\right\}$

5) $\mathscr{S}=\{-2;-1\}$

6)

$$\begin{aligned}
&2x(x^2+2)=x^2(x^2+2)\\
\iff\ &2x(x^2+2)-x^2(x^2+2)=0\\
\iff\ &x(x^2+2)(2-x)=0\\
\iff\ &\dots
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\{0;2\}$

Ex 37

1)

$$\begin{aligned}
&3x^2-1=0\\
\iff\ &\left(x\sqrt{3}-1\right)\left(x\sqrt{3}+1\right)=0\\
\iff\ &x\sqrt{3}-1=0 \quad\text{ou}\quad x\sqrt{3}+1=0
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ ou $\mathscr{S}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2) $0{,}04x^2=1 \iff 0{,}04x^2-1=0$
$\mathscr{S}=\{-5;5\}$

3) $\mathscr{S}=\left\{-\frac{\sqrt{105}}{105};\frac{\sqrt{105}}{105}\right\}$

4)

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2+(x-1)^2=6\\
\iff\ &2x^2-4=0\\
\iff\ &\dots
\end{aligned}$$

$\mathscr{S}=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

Ex 38

$\mathscr{S}=\{2\}$

Ex 39

1) En posant x la fortune, on a :
$\frac{x}{2}-3000+\frac{x}{3}-1000+\frac{x}{4}+600+\frac{x}{5}=x$
On trouve $x=12000$.

2) Chaque enfant touche 3000 livres.

Ex 40

On ajoute -2199 au numérateur et au dénominateur.

Ex 41

Le prisme est nécessairement à base triangle *rectangle* isocèle. Sa base doit avoir une surface de 25 cm^2. On scie donc à une distance de $\sqrt{50}$ cm d'un sommet sur deux arêtes horizontales consécutives.

Ex 42

La ficelle se trouverait à $\frac{1}{2\pi}$ m $\approx$ 16 cm d'altitude.

Ex 43

Il faut mélanger $\frac{14}{3}\approx 47$ mL de solution dosée à 30 %, que l'on complète avec $\frac{7}{3}\approx 23$ mL d'eau.

Ex 44

1)

$$\begin{aligned}
&x^2-x-1=0\\
\iff\ &x^2-2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0\\
\iff\ &\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0\\
\iff\ &\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&x^2-x-1=0\\
\iff\ &\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\\
\iff\ &x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\\
\iff\ &x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Ex 45

1) deux solutions $x=-2$ et $x=\frac{1}{4}$.
2) deux solutions $x=\frac{3-\sqrt{57}}{4}$ et $x=\frac{3+\sqrt{57}}{4}$.
3) $x=0$ unique solution.
4) Pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant négatif).
5) Pas de solution dans $\mathbb{R}$ (discriminant négatif).

Ex 46

a) L'équation $X^2+X-12=0$ admet deux solutions $X=-4$ et $X=3$.
Or $X=x^2$ donc l'équation de départ admet seulement deux solutions qui sont $x=\sqrt{3}$ et $x=-\sqrt{3}$.

b) L'équation $X^2 - 13X + 36 = 0$ admet deux solutions $X = 4$ et $X = 9$.
Or $X = x^2$ donc l'équation de départ admet quatre solutions qui sont les éléments de $\{-3; -2; 2; 3\}$.

Ex 47

Faire le calcul.

Ex 48

$500x^2 = 320(x+5)^2 \iff 5x = \pm 4(x+5)$.
Les dimensions des premiers carreaux sont de 20cm×20cm.

Ex 49

$v_A + v_B = 90$ km/h et
$\frac{180}{v_A} = \frac{180}{90 - v_A} + 0{,}9 \iff v_A^2 - 490v_A + 18000 = 0$
Le train partant de A fait 40km/h et celui partant de B, 50km/h.

Ex 50

Soit x, la distance séparant A du point de rencontre. Alors on a
$\frac{x}{v_A} = \frac{66-x}{v_B} - 3$, $v_A = \frac{66-x}{6{,}25}$ et $V_B = \frac{x}{1{,}6}$
d'où
$\frac{6{,}25x}{66-x} = \frac{1{,}6\cdot(66-x)}{x} - 3$
$\iff 1{,}65x^2 + 409{,}2x - 6969{,}6 = 0$
Le point de rencontre se trouve à 16 km de A.

Ex 51

$\frac{1{,}2}{v-5} = \frac{1{,}2}{v+5} + \frac{1}{2}$
La vitesse du canoë en eau tranquille est de 7 km/h.

Ex 52

1) Le rayon du second comprimé doit être de $\frac{\sqrt{13}-1}{4} \approx 0{,}65$ cm.

2) $V_1 = \frac{5\pi}{12}$ et $V_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{16}$ en cm³.

Ex 53

1) $\{(\frac{76}{53}; \frac{28}{53})\}$
2) $\{(\frac{67}{34}; \frac{13}{34})\}$
3) $\{(\frac{51}{13}; \frac{96}{13})\}$
4) $\{(\frac{8}{7}; -\frac{3\sqrt{6}}{7})\}$
5) $\{(1; -3)\}$
6) $\varnothing$
7) $\{(x; y) \mid y = -3x + 5\}$
8) $\{(-1; 2; -3)\}$

Ex 54

1) On a $x^2 + 2x - 35 = (x-5)(x+7)$, et le tableau de signe :

$x \in$	$]-\infty; -7[$	$]-7; 5[$	$]5; +\infty[$
$x+7$	−	+	+
$x-5$	−	−	+
$(x+7)(x-5)$	+	−	+

Donc $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 35 < 0\} =]-7; 5[$.

2) Avec le tableau de signes :
$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+7}{x-5} \geqslant 0\right\} =]-\infty; -7] \cup]5; +\infty[$

3) $\frac{x+7}{x-5} \leqslant -2 \iff \frac{x+7}{x-5} + 2 \leqslant 0$
$\iff \frac{x+7}{x-5} + \frac{2x-10}{x-5} \leqslant 0$
$\iff \frac{3x-3}{x-5} \leqslant 0.$

On dresse le tableau de signes :

$x \in$	$]-\infty; 1[$	$]1; 5[$	$]5; +\infty[$
$3x-3$	−	+	+
$x-5$	−	−	+
$\frac{3x-3}{x-5}$	+	−	+

Donc $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+7}{x-5} \leqslant -2\right\} = [1; 5[$

4) $[-2; -1]$

Ex 55

1) Méthode 1 : $P(x) = (3x-1)(-2x+5)$
utilisation d'un tableau de signes

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $3x+1$		−	0	+		+	
signe de $-2x+5$		+		+	0	−	
signe de $P(x)$		−	0	+	0	−	

Conclusion : $S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

Méthode 2 : On a un polynôme du second degré. Le coefficient de degré 2 est $3 \times -2 = -6 < 0$. Ce polynôme est négatif à l'extérieur de racines.

2) On fait un tableau de signes

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
signe de $3x-8$		−		−	0	+	
signe de $2x+3$		−	0	+		+	
signe de $\frac{3x-8}{2x+3}$		+	‖	−	0	+	

Conclusion : $S = \left]-\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right]$

3) $P(x) = (x-2)(3x+5)(3-7x)$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{3}{7}$		2		$+\infty$
signe de $x-2$		−		−		−	0	+	
signe de $3x+5$		−	0	+		+		+	
signe de $3-7x$		+		+	0	−		−	
signe de $P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Conclusion : $S = \left]-\frac{5}{3}; \frac{3}{7}\right[\cup]2; +\infty]$

4) Soit $Q(x) = \frac{7x-2}{4x^2-1}$
$4x^2 - 1$ est un polynôme du second degré ayant pour racines $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $7x-2$		−		−	0	+		+	
signe de $4x^2-1$		+	0	−		−	0	+	
signe de $Q(x)$		−	‖	+	0	−	‖	+	

Conclusion : $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{2}{7}; \frac{1}{2}\right[$

Remarque : On aurait pu aussi écrire $Q(x) = \frac{7x-2}{(2x-1)(2x+1)}$ et faire un tableau de signe.

5) On pose $Q(x) = \frac{4x^3 - 9x}{x^2 - 16}$.
On a $Q(x) = \frac{x(4x^2-9)}{(x^2-16)}$
$4x^2 - 9$ est un trinôme du second degré de racines $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines.
$x^2 - 16$ est un trinôme du second degré de racines -4 et 4. Il est positif à l'extérieur des racines.
On fait un tableau de signes. On note $A(x) = 4x^2 - 9$ et $D(x) = x^2 - 16$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
sgn x		−		−		−	0	+		+		+	
sgnA(x)		+		+	0	−		−	0	+		+	
sgnD(x)		+	0	−		−		−		−	0	+	
sgn Q(x)		−	‖	+	0	−	0	+	0	−	‖	+	

Conclusion :
$S = \left]-4; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup]4; +\infty[$

Remarque : on peut aussi écrire :
$Q(x) = \frac{x(2x-3)(2x+3)}{(x-4)(x+4)}$
et faire un tableau de signes.

6) $(3x+2)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0$
$\iff (3x+2-(x-1))\,(3x+2+(x-1)) \leqslant 0$
$\iff (2x+3)(4x+1) \leqslant 0$
On ait un tableau de signes. $S = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right]$

7) On remarque que pour tout nombre x réel, on a $(5x+1)^2 + 9 \geqslant 9 > 0$
$S = \varnothing$

8) On remarque que pour tout nombre x réel, on a $3x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.
donc $(3x^2+1)(9-2x) > 0 \iff 9 - 2x > 0$
$S = \left]-\infty; \frac{9}{2}\right[$

9) $x^2 + 2x - 3$ a pour racines -3 et 1.
$x^2 + 3x + 2$ a pour racines -2 et -1
Les deux polynômes sont positifs à l'extérieur de leurs racines.
On fait un tableau de signes.
On note $Q(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2}$, $N(x) = x^2 + 2x - 3$ et $D(x) = x^2 + 3x + 2$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
sgn N(x)		+	0	−		−		−	0	+	
sgn D(x)		+		+	0	−	0	+		+	
sgn Q(x)		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

Conclusion
S $=]-\infty;-3[\cup]-2;-1[\cup]1;+\infty[$

Ex 56

1) $(2x-1)^2 \leqslant 3 \iff (2x-1)^2-3 \leqslant 0$
$\iff (2x-1-\sqrt{3})(2x-1-\sqrt{3}) \leqslant 0$
Ensuite deux méthodes de résolution : soit on fait un tableau de signes, soit on utilise le signe du trinôme du second degré (on connaît les deux racines $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$).
$S = \left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

2) $(x+3)^2 > 5(x+3(x-2)$
$\iff (x+3)^2-5(x+3)(x-2)>0$
$\iff (x+3)(x+3-5(x-2))>0$
$\iff (x+3)(-4x+13)>0$
On fait un tableau de signe. $S = \left]-3;\dfrac{13}{4}\right[$

3) $(x-1)^2(x-2)<(x^2-1)(2-x)$
$\iff (x-1)^2(x-2)-(x^2-1)(2-x)<0$
$\iff (x-1)^2(x-2)+(x-1)(x+1)(x-2)<0$
$\iff (x-1)(x-2)(x-1+x+1)<0$
$\iff 2x(x-1)(x-2)<0$
On fait un tableau de signes.
S $=]-\infty;0[\cup]1;2[$

4)
$$\frac{x-1}{x+1}>2 \iff \frac{x-1}{x+1}-2>0$$
$$\iff \frac{x-1-2(x+1)}{x+1}>0$$
$$\iff \frac{-x-3}{x+1}>0$$
$$\iff -\frac{x+3}{x+1}>0$$
$$\iff \frac{x+3}{x+1}<0$$
On fait un tableau de signes. S $=]-3;-1[$

5)
$$\frac{3x-2}{5-3x}\geqslant 1 \iff \frac{3x-2}{5-3x}-1\geqslant 0$$
$$\iff \frac{(3x-2)-(5-3x)}{5-3x}\geqslant 0$$
$$\iff \frac{6x-7}{5-3x}\geqslant 0$$
Puis on fait un tableau de signes.
$S = \left[\dfrac{7}{6};\dfrac{5}{3}\right[$

6)
$$\frac{2x+1}{x+2}\geqslant x \iff \frac{2x+1}{x+2}-x\geqslant 0$$
$$\iff \frac{(2x+1)-x(x+2)}{x+2}\geqslant 0$$
$$\iff \frac{2x+1-x^2-2x}{x+2}\geqslant 0$$
$$\iff \frac{1-x^2}{x+2}\geqslant 0$$
On fait un tableau de signes.
S $=]-\infty;-2[\cup]-1;1]$

7)
$$\frac{5x+3}{3x+5}\leqslant\frac{3x+5}{5x+3}$$
$$\iff \frac{5x+3}{3x+5}-\frac{3x+5}{5x+3}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{(5x+3)^2-(3x+5)^2}{(3x+5)(5x+3)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{(2x-2)(8x+8)}{(3x+5)(5x+3)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{2\times 8(x-1)(x+1)}{(3x+5)(5x+3)}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{(x-1)(x+1)}{(3x+5)(5x+3)}\leqslant 0$$
On fait un tableau de signes.
$S = \left]-\dfrac{5}{3};-1\right]\cup\left]-\dfrac{3}{5};1\right]$

Ex 57

Pour $x\neq n$,
$$\frac{1}{x-n}\geqslant x-n \iff \frac{1}{x-n}-(x-n)\geqslant 0$$
$$\iff \frac{1-(x-n)^2}{x-n}\geqslant 0$$
$$\iff \frac{(x-n)^2-1}{x-n}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{(x-n-1)(x-n+1)}{x-n}\leqslant 0$$
$$\iff \frac{(x-(n+1))\,(x-(n-1))}{x-n}\leqslant 0$$

Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{n\}$, on pose
$$\mathrm{Q}(x)=\frac{(x-(n+1))\,(x-(n-1))}{x-n}$$

x	$-\infty$		$n-1$		n		$n+1$		$+\infty$
signe de $x-(n-1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-(n+1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-n$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\mathrm{Q}(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion : S $=]-\infty;n-1]\cup]n;n+1]$

Ex 58

1) $[3;+\infty[$

2) $\left]\dfrac{12}{25};\dfrac{1}{2}\right]$

3) $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

2.5 Fonctions

Ex 59

1) $\mathbb{R}^*$.

2) $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

3) $\left]-\infty;-\dfrac{7}{3}\right[\cup\left]-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$.

4) $]1;+\infty[$.

5) $]-\infty;3[\cup]7;+\infty[$.

6) $]-5;2]$

Ex 60

1)
$f(1)=-2$ $\quad f(-2)=-0,5$ $\quad f(0)=-1,5$
$g(1)=2$ $\quad g(-2)=2$ $\quad g(0)=3$
$h(1)=2$ $\quad h(-2)=-1$ $\quad h(0)=1$

2) « Le point $(-49;-48)$ appartient à la courbe représentative de h. » **VRAI**

3) Compléter
Si $f(x)=-3$, alors $x=3$
Si $g(x)=3$, alors $x=3$ ou $x=-1$
Si $h(x)=0$, alors $x=-1$
Si $f(x)=g(2)$, alors $x=-3$
Si $f(x)=h(x)$, alors $x=-1,75$
Si $g(x)>f(x)$, alors $x\in]-3;3[$
Si $g(x)=h(x)$, alors $x=-4$ ou $x=1$

4) f est positive sur $]-\infty;-3]$.
g est négative sur $]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$
h est strictement positive sur $]-1;+\infty[$.

Ex 61

1) $(x+1)^2>x^2$

2) $(x-4)^2<(x-3)^2$

3) $(x-4)^2<(x-3)^2$

Ex 62

1) $1\leqslant x\leqslant 4$

2) $9\leqslant x<49$

3) $1\leqslant x<16$

4) $0<x<64$

5) $0\leqslant x\leqslant 25$

6) $0\leqslant x<5$

Ex 63

1) $\mathscr{C}_g$ est symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

2) $\mathscr{C}_h$ est confondue avec $\mathscr{C}_f$.

3) $\mathscr{C}_i$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-3\vec{i}$.

4) $\mathscr{C}_j$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

5) $\mathscr{C}_k$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $7\vec{j}$.

6) $\mathscr{C}_l$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par une compression de l'axe des ordonnées de rapport 3.

7) $\mathscr{C}_m$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\vec{i}-\vec{j}$.

Ex 64

$\mathscr{C}_g$ est en pointilles rouges (la seule courbe dont l'image de 0 n'est pas égale à -3.
$\mathscr{C}_h$ est en pointillées bleus (parmi les trois courbes restantes, c'est la seule dont le coefficient de x^2 soit positif).
Sachant que l'abscisse du sommet est $\frac{-b}{a}$, on

constate que la courbe en trait plein verte représente f et que les pointillés oranges représentent k.

Ex 65

La parabole verte en trait plein s'annule pour $x=-1$ et $x=3$. Son équation est donc du type $y=a(x+1)(x-3)$. Avec les coordonnées de son sommet $A(1;-2)$, on trouve que $a=\frac{1}{2}$.
La parabole en pointillés bleus s'annule pour $x=-3$ et $x=5$. Son équation est donc du type $y=b(x+3)(x-5)$. Avec les coordonnées de son sommet $B(1;4)$, on trouve que $b=\frac{-1}{4}$.
La parabole en pointillés rouges s'annule pour $x=-4$ et $x=0$. Son équation est donc du type $y=cx(x+4)$. Avec les coordonnées de son sommet $C(-2;-4)$, on trouve que $c=1$.
Il ne reste qu'à développer ces trinômes.

Ex 66

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{12}x^2 & \text{si } x\in[0;6]\\ 5x-15 & \text{si } x\in[6;10]\end{cases}$$

Ex 67

$x\in[0;5]$ et $V(x)=200x-\dfrac{4\pi}{3}x^3$

Ex 68

1) Si $x=0$ alors $y=h=1{,}50$
Si $x=2$ alors $y=0=4a+1{,}5$ donc $a=-\dfrac{3}{8}$.

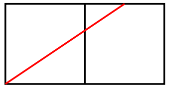
2) $v^2=-\dfrac{6}{a}=14$ donc $v=4$ m/s.

Ex 69

1) $\ell(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{1+(2-x)^2}$

2) À la calculatrice on trouve que ℓ est minimale pour $x=\dfrac{4}{3}$.

Il est possible aussi de démontrer ce résultat à l'aide d'un patron (la ligne droite est la plus courte) :



Ex 70

La gouttière a une contenance maximale si son aire de coupe l'est aussi.
Or l'aire de coupe est égale à $a(x)=x(12-2x)$.
C'est une fonction du second degré, maximale si $x=3$.

Ex 71

$f(x)=\dfrac{0{,}9}{1{,}35^2}x(2{,}7-x)$.

Ex 72

La fonction
$f:x\mapsto|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$
admet $x=3$ pour axe de symétrie.
f est décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$.
$f(3)=6$.
Pour $a=6$ l'équation admet une unique solution.
Pour $a<6$ l'équation n'a pas de solution.
Pour $a>6$ l'équation a deux solutions distinctes.

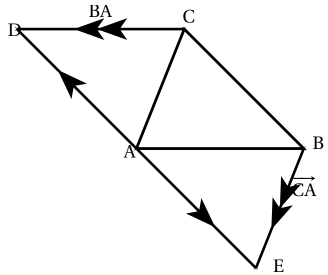
Ex 73

On suppose que f existe,
On obtient que $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ ce qui contredit que f est strictement croissante.

2.6 Vecteurs et géométrie repérée

Ex 74

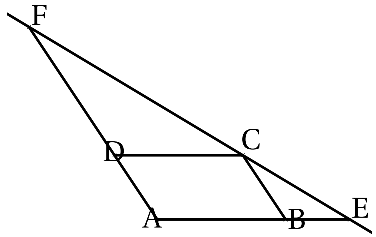
1) Pour construire D et E, on doit utiliser les relations $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$. Donc, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$. On obtient la figure :



2) D'après les deux relations définissants D et E, on a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\&=-\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=-\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, D et E sont alignés.

3) D'après la construction du point D, on a $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$, on en déduit que ABCD est un parallélogramme. Donc, les droites (CB) et (AD) sont parallèles, et d'après le 2. on a les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ex 75



Le dessin montre que la question n'est pas absurde et qu'il semble que $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{CE}$, résultat qu'on va prouver.
Exprimons le vecteur $\overrightarrow{FD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$:
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}\\\iff\ &\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{AD}\\\iff\ &\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{AD}\\\iff\ &\overrightarrow{FD}=-2\overrightarrow{AD}\quad ①\end{aligned}$$

On a aussi la relation, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BE}$ ②
$$\begin{aligned}\overrightarrow{FC}&=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC} &&\text{d'après la formule de Chasles}\\&=-2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}&&\text{d'après ①}\\&=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}&&\text{ABCD étant un parallélogramme}\\&=2\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BE}&&\text{d'après ②}\\&=2\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right)\\&=2\overrightarrow{CE}&&\text{d'après la formule de Chasles}\end{aligned}$$
On a bien $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{CE}$, Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires, donc les points F, C et E sont alignés.

Ex 76

1)
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\\iff\ &\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\\\iff\ &\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\\iff\ &4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\\iff\ &-4\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\\iff\ &-4\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}\\\iff\ &\overrightarrow{AM}=\frac{-3}{-4}\overrightarrow{AB}\\\iff\ &\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant défini on peut placer le point M sans problème.

2)
$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}=\vec{0}\\\iff\ &\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}\\\iff\ &\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\vec{0}\\\iff\ &\frac{9}{6}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{6}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\\\iff\ &\frac{7}{6}\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\\iff\ &\overrightarrow{AM}=-\frac{6}{7}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\\iff\ &\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant défini, le point M est bien défini aussi.

Ex 77

1)

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant défini on peut placer le point M sans problème, on a même ses coordonnées dans la repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

2)

$$\begin{aligned} & 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC} \\ \iff & 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} \\ \iff & -\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ \iff & \overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant défini on peut placer le point M sans problème, on a même ses coordonnées dans la repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

Ex 78

Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $P\left(0;\frac{3}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $Q\left(\frac{3}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{PM}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{PQ}\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$

donc $\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{PQ}$. Les vecteurs étant colinéaires,les points P, M et Q sont alignés.

Ex 79

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CD}$. On en déduit que ICDJ est un parallélogramme.

Ex 80

1) $AB^2=65, AC^2=52, BC^2=65$. Donc le triangle ABC est isocèle en B.

2) $H\left(\frac{-3+3}{2};\frac{2+6}{2}\right)$. Donc H(0;4).

3) Equation de (BK) : Soit $M(x;y)\in(BK) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(x-4;y+2)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BH}(-4;6) \Leftrightarrow 6x-24+4y+8=0 \Leftrightarrow 3x+2y-8=0$
Or $3\times2+2\times1-8=0$ donc $K\in(BH)$.

4) Comme le triangle ABC est isocèle en B, la médiane issue de B est aussi une hauteur. $BH=\sqrt{16+36}=2\sqrt{13}$ et $AC=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$. Donc $Aire(ABC)=\frac{(2\sqrt{13})^2}{2}=26u.a.$

Ex 81

1) $AB^2=40, AC^2=80, BC^2=40$. Donc le triangle ABC est isocèle en B et comme $AC^2=AB^2+BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est aussi rectangle en B.

2) On a R(3;2)

3) R milieu de [AE] $\Leftrightarrow 3=\frac{-2+x}{2}$ et $\frac{-3+Y}{2} \Leftrightarrow$ $x=8$ et $y=7$. Donc E(8;7).

4) R est le milieu de [BC] et de [AE] donc ABEC est un parallélogramme. De plus $AB\neq AC$ donc ABEC n'est pas un losange et (AB) n'est pas perpendiculaire à (AC). ABEC n'est pas un parallélogramme particulier.

5) BCEF est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x-8=2$ et $y-7=-6 \Leftrightarrow x=10$ et $y=1$. Donc E(10;1). ABEC est un parallélogramme donc (AB)//(CE) et (BC)⊥(AB). Donc (BC)⊥(CE). Ainsi BCEF est un rectangle.

Ex 82

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\-\frac{13}{6}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$
$AB^2=\frac{109}{36}$, $AC^2=\frac{218}{36}$, $BC^2=\frac{109}{36}$.
On observe que $AC^2=AB^2+BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. De plus AB = BC, on conclut que ABC est rectangle isocèle en B.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$
$AB^2=13$, $AC^2=\frac{130}{4}$, $BC^2=\frac{130}{4}$.
AC = BC , ABC est isocèle en C.

3) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$
$AB^2=45$, $AC^2=20$, $BC^2=65$.
On observe que $BC^2=AB^2+CC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

Ex 83

1) $\Delta:(3-\sqrt{2})x+(2-\sqrt{2})y-1-\sqrt{2}=0$.

2) $\Delta:20x+30y-3=0$.

3) $\Delta:7x+5y+4=0$.

4) $\Delta:3x+2y-2\sqrt{3}=0$.

Ex 84

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si

1) $m=2(3-2\sqrt{2})$

2) $m=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$

3) $m=\frac{1}{\sqrt{7}}$ ou $m=-\frac{1}{\sqrt{7}}$

Ex 85

1) $D(-5;-3)$ et $L(-1;0)$.

2) $G\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3) a) $E(-10;-5)$.

b) $\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{GB}$, les points E, G, B sont alignés. (Justifier)

Ex 86

1) Les points A, B, C ne sont pas alignés. Alors les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas colinéaires. Donc $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ est un repère du plan.
$R\left(\frac{6}{5};0\right)$, $P\left(0;\frac{2}{3}\right)$, $Q\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$.

2) $\det(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR})=\begin{vmatrix}\frac{9}{20} & \frac{6}{5}\\-\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix}=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires. Donc les points P, Q, R sont alignés.

Ex 87

1) $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{AB}$. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. ABDC est un trapèze.

2) $D(8;-7)$, $I(1,2)$ et $J((2;-4)$.

3) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc , par définition, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$.
$E(-1-3k;3-4k)$.

b) $\det(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})=0 \iff \begin{vmatrix}-4-3k & 5\\2-4k & -8\end{vmatrix}=0$
$\iff 44k+22=0 \iff k=-\frac{1}{2}$
Donc $E\left(\frac{1}{2};5\right)$.

4) $(AD):10x+9y-17=0$,
$(BC):2x-7y+1=0$.

5) $F\left(\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$.

6) $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{EI}=-4\overrightarrow{FI}$ donc les points E, I, F et J sont alignés.

Ex 88

1) $A(4;-2)$.

2) $E(3;0)$, $F(0;6)$, $B(2;0)$ et $C(0;2)$.

3) $\mathscr{A}(BCFE)=7$, et $\mathscr{A}(ABE)=1$.

4) $\mathscr{A}(ACF)=8$. or $\mathscr{A}(ACF)=\frac{CH\times AF}{2}$ donc $CH=\frac{16}{AF}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.